Příklad 1: Statistika A, doc. Kropáč, str. 61, příklad 2

K benzínovému čerpadlu přijíždí průměrně 40 aut za hodinu. Určete pravděpodobnost, že během pěti minut přijede nejvýše jedno auto.

Pokus: Zjištění, kolik aut přijede k čerpadlu během pěti minut.

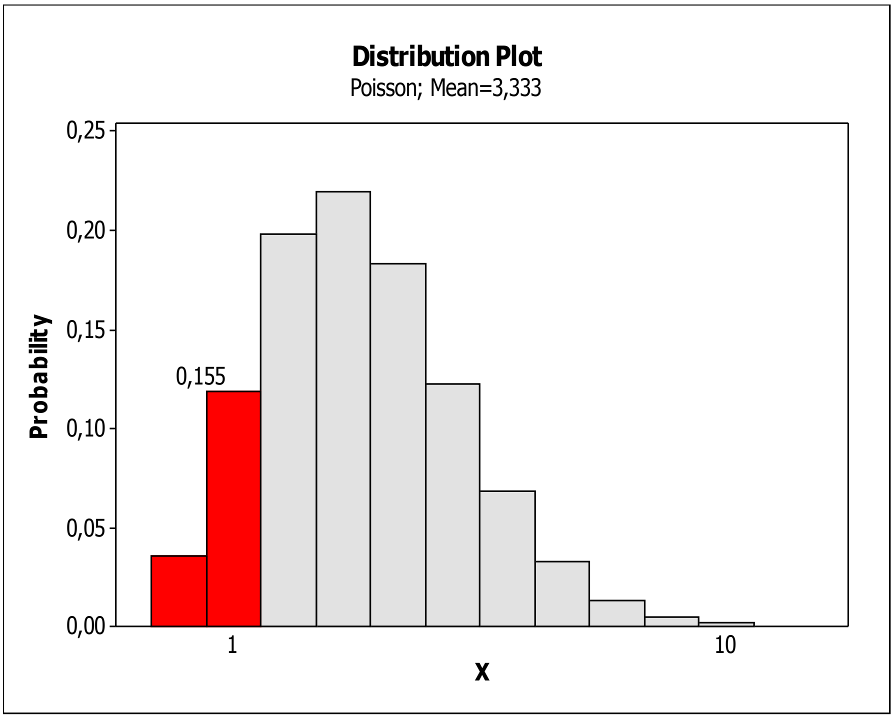
Náhodná veličina X = počet aut, která přijedou během pěti minut. k je kategorie počtu příchozích aut.
Závisí to na náhodě, X patří do celých čísel {0, 1, 2, 3, ...}.

Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou lambda. Poissonovo rozdělení je definováno jako $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$ Tedy střední hodnota příjezdu aut za pět minut je $E(X) = \lambda = 40/60 * 5 = 10/3 = 3{,}33$.

k	$P(X=k)$
0	$\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^0}{0!} * e^{\frac{-10}{3}} = 0{,}036$
1	$\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^1}{1!} * e^{\frac{-10}{3}} = 10/3 * 0{,}036 = 0{,}119$

Pravděpodobnost, že přijede nejvýše 1 auto spočteme: $P(X <= 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}036 + 0{,}119 = 0{,}155$.

Shrnutí a interpretace výsledků
Je přibližně 15,5% pravděpodobnost, že v pětiminutovém intervalu přijede nejvýše 1 auto.



Příklad 2: Statistika A, doc. Kropáč, str. 61, příklad 5

Obchodní cestující prodává pračky. Na obchodní cesty jezdí se čtyřmi pračkami. Statisticky má zjištěno, že průměrně dva z devíti zákazníků, kterým pračku nabídne, si ji koupí. Jaká je pravděpodobnost, že na obchodní cestě prodá alespoň jednu pračku? Jaká je střední hodnota prodaných praček na obchodní cestě?

Pokus: Zjištění, kolik praček prodá obchodní cestující na své obchodní cestě.

Náhodná veličina X: počet prodaných praček; X náleží do {0, 1, 2, 3, 4}.

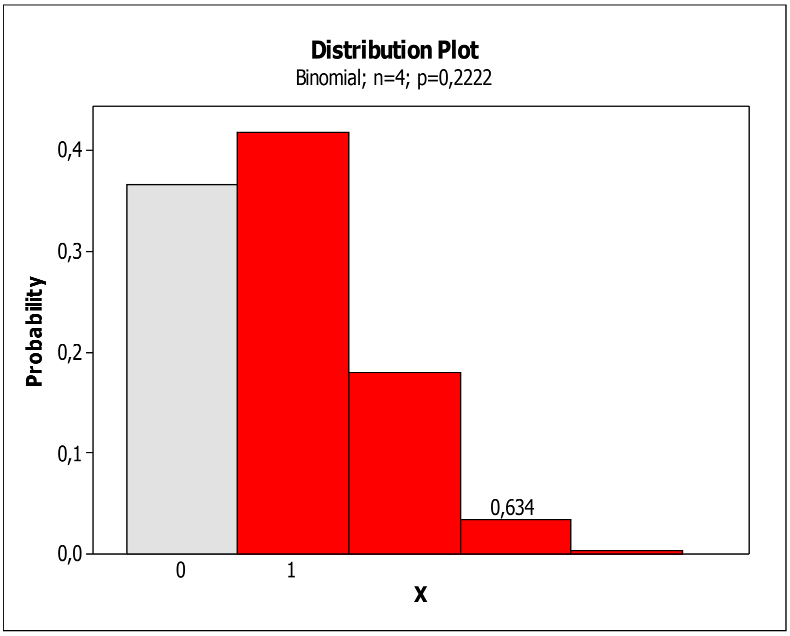
Dílčí pokus – nabídne pračku zákazníkovi.
Definujme si jev A – zákazník pračku koupí, odpovídající pravděpodobnost si zapišme, $P(A) = 2/9$.
Dílčí pokus opakujeme čtyřikrát; $n = 4$; náhodná veličina X má binomické rozdělení $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, kdy pro střední hodnotu je dokázáno a platí $E(X)=n\cdot p$. Střední hodnotu spočteme dosazením $E(X) = 4 * 2/9 = 8/9 = 0{,}89$.

k	$\binom{4}{k}$	$\left(\frac{2}{9}\right)^k$	$\left(\frac{7}{9}\right)^{4-k}$	$P(X=k)$
0	1,0000	1,0000	0,3660	0,3660
1	4,0000	0,2222	0,4705	0,4182
2	6,0000	0,0494	0,6049	0,1792
3	4,0000	0,0110	0,7778	0,0341
4	1,0000	0,0024	1,0000	0,0024
Σ	--	--	--	1,0000

Dále užijeme vlastnosti doplňku $P(X\geq 1)=1-P(X=0)$ nebo lze pro náš příklad zvolit numericky náročnější způsob, tedy $P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$. Ze souhrnné tabulky již dopočteme $P(X\geq 1)=0{,}4182+0{,}1792+0{,}0341+0{,}0024=0{,}634$.

Shrnutí a interpretace výsledků

V průměru z každé obchodní cesty prodá (střední hodnota prodaných praček je) 0,89 pračky. Pravděpodobnost, že prodá aspoň jednu pračku, je 63,4 %.



Příklad 3: Statistika A, doc. Kropáč, str. 79, příklad 3

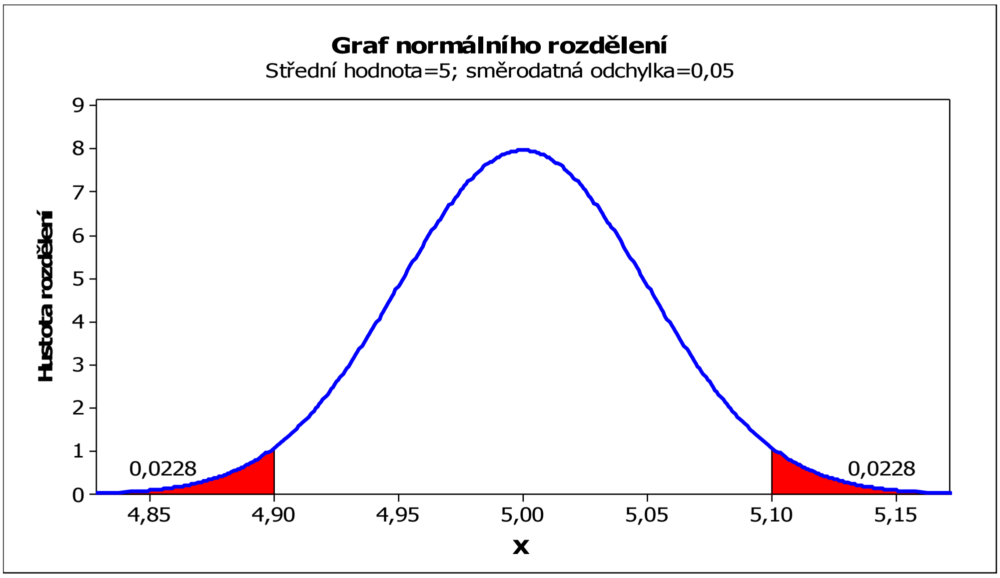
Stroj vyrábí olověné broky. Průměr broku je náhodnou veličinou, měřenou v milimetrech, o níž předpokládáme, že má rozdělení N(5; 0,05^2). Kolik procent broků je při kontrole vyřazeno, jestliže broky, lišící se více než o 0,1 milimetrů od střední hodnoty jsou vyřazovány?

Pokus: Zjištění pravděpodobnosti kvalitních broků z vlastností průměru broků.
Náhodná veličina X: Průměr broku měřená v milimetrech.

Jedná se o spojitou náhodnou veličinu, s normálním rozdělením a parametry $\mu = 5$, $\sigma = 0{,}05$. Pravděpodobnost intervalu z normálního rozdělení zjistíme užitím vztahu $P(x_1 < X < x_2) = F_N\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - F_N\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$, konkrétně

$P(4{,}9 < X < 5{,}1) = F_N(5{,}1) - F_N(4{,}9)$ = 2 * $P(X <= 4{,}9)$ = 2 * $F(4{,}9)$ = 2 * $F_N((4{,}9 - 5)/0{,}05)$ =
= 2 * $F_N(-2)$ = 2 * $(1 - F_N(2))$ = 2 * (1 – 0,97725) = 0,0455.

Grafické znázornění uvádíme na této straně.



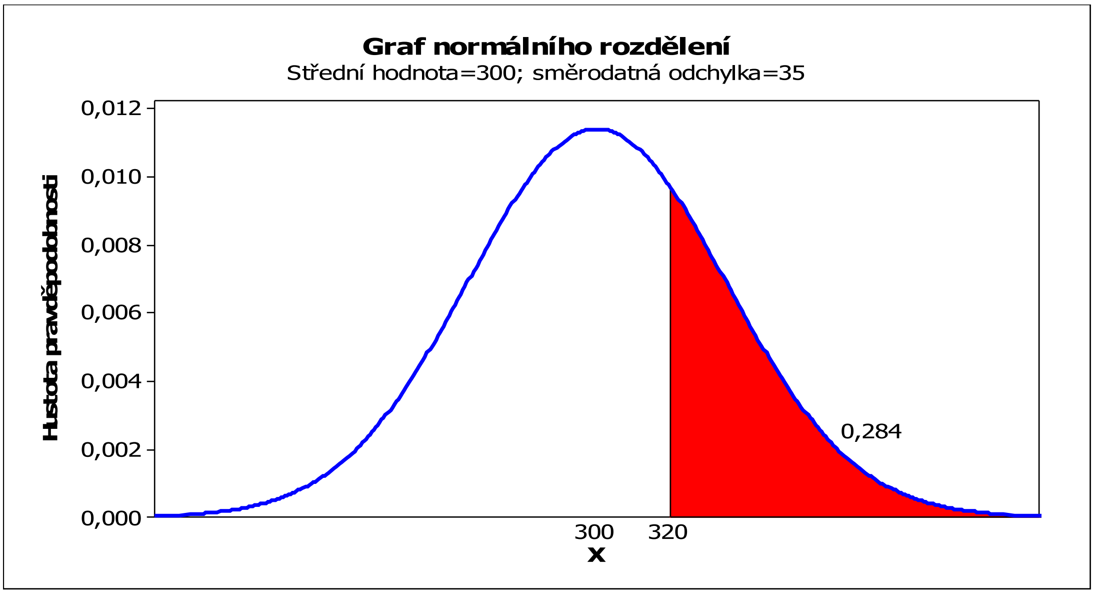
Shrnutí a interpretace výsledků
Asi 4,5 % broků je při kontrole vyřazeno, protože se liší o více než 0,1 mm od střední hodnoty.

Příklad 4: Statistika A, doc. Kropáč, str. 79, příklad 7

Životnost elektrické baterie, měřená v hodinách, má normální rozdělení se střední hodnotou 300 hodin a směrodatnou odchylkou 35 hodin. Kolik procent baterií má životnost větší než 320 hodin?

Pokus: Měření životnosti baterií.
Náhodná veličina X: Životnost baterie měřená a zjišťovaná v hodinách.

Jedná se o spojitou náhodnou veličinu, s normálním rozdělením s parametry $\mu = 300$ a $\sigma = 35$. Formálně zapsáno náhodná veličina X pochází z normálního rozdělení, $X \sim N(300, 35^2)$. K výpočtu potřebujeme $F(x) = F_N(\frac{x-\mu}{\sigma})$ a vlastnost doplňku, konkrétně $P(x > 320) = 1 - F_N(320)$, tedy $P(X > 320) = 1 - F_N((X - n)/\sigma) = 1 - F_N((320 - 300) / 35) = 1 - F_N(0{,}57) = 1 - 0{,}71566 = 0{,}28434$. Graficky je vše dokumentováno na obrázku níže.



Shrnutí a interpretace výsledků
Životnost baterií větší jak 320 hodin splňuje asi 28,4 % všech baterií.

Příklad 5: Statistika A, doc. Kropáč, str. 80, příklad 12

Stroj vyrábí součástky, jejichž délky mají náhodné odchylky od normou stanovené hodnoty. Tyto odchylky mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou 5 mm.

a) Kolik procent výrobků je I. třídy, jestliže se do této třídy zařazují výrobky s odchylkami délek v absolutní hodnotě menšími než 3 mm?

b) Za jakou, v absolutní hodnotě největší hodnotu odchylek v milimetrech se lze zaručit s pravděpodobností 0,9?

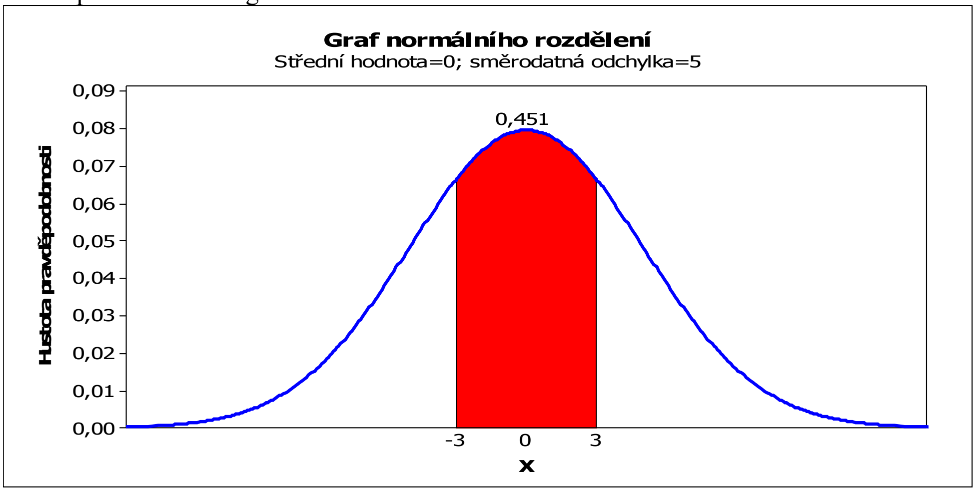
Pokus: Zjištění rozměrů součástky.
Náhodná veličina X: Hodnota odchylky rozměrů od normy. Jedná se o spojitou náhodnou veličinu, s normálním rozdělením a parametry $\mu = 0$ a $\sigma = 5$.

Ad zadání a)

Nejde o nic jiného než rozepsání absolutní hodnoty na interval a výpočet pravděpodobnosti z distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

$$P(-3 < X <= 3) = F_N((3 - 0)/5) - F_N((-3 - 0)/5) =$$
$$= F_N(0{,}6) - (1 - F_N(0{,}6)) = 2F_N(0{,}6) - 1 = 2 * 0{,}72575 - 1 = 0{,}4515.$$

Graficky je příklad reprezentován na grafu.

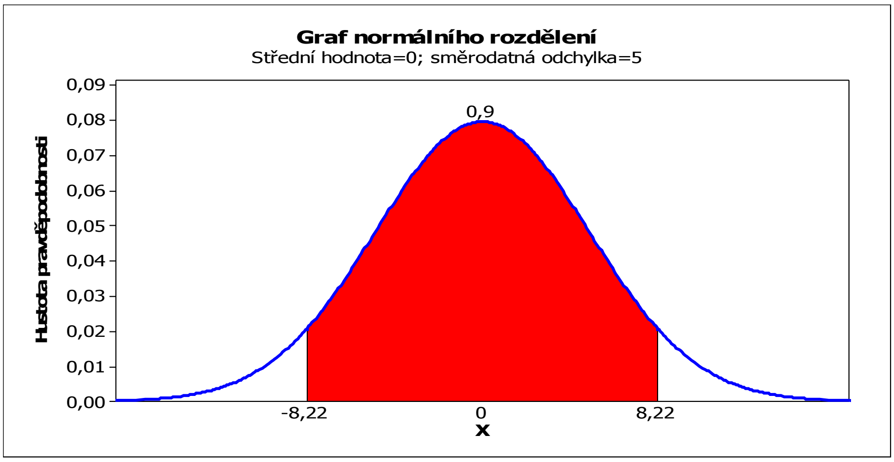


Shrnutí a interpretace výsledků
Přibližně 45,2 procent výrobků spadá do I. třídy.

Ad zadání b)

Úkolem je najít symetrický interval od střední hodnoty, hledáme bod x_2 s podmínkou $P(-x_2 < X < x_2) = 0{,}9$. Numerické řešení a grafická reprezentace následující na dalších řádcích.

$$F_N(x_2/5) - F_N(-x_2/5) = 0{,}90$$
$$F_N(x_2/5) - (1 - F_N(x_2/5)) = 0{,}90$$
$$2 * F_N(x_2/5) = 1{,}90$$
$$2 * F(x_2/5) = 1{,}90$$
$$F(x_2/5) = 0{,}95$$
$$x_2/5 = 1{,}645$$
$$x_2 = 8{,}23$$



Shrnutí a interpretace výsledků
S pravděpodobností 0,9 se lze zaručit v absolutní hodnotě za největší hodnotu odchylek asi 8,2 mm.